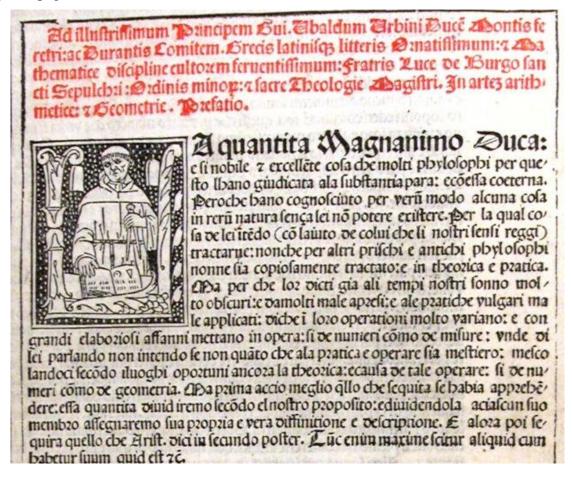
# Le proporzioni e il moto dei corpi: l'eco della scuola francescana di Oxford in tre problemi di cinematica della *Summa* di Pacioli".

### **Argante Ciocci**

"Se tu ben discorri, in tutte le arti tu troverai la proportione de tutte esser madre e regina e senza lei niuna poterse exercitare"

Luca Pacioli, Summa, c. 68v

Il progetto culturale che innerva il pensiero e l'opera di Pacioli è costituito dall'estensione della matematica a tutto lo scibile umano e che questa sia la finalità precipua di frate Luca lo si evince già dalle prime pagine della *Summa*.



Nella lettera di dedica a Guidobaldo da Montefeltro che apre l'opera la motivazione della matematizzazione di tutta la conoscenza resta sospesa fra la riconosciuta *utilità* a fini pratici delle discipline matematiche e la *certezza* che esse forniscono al sapere. Da una parte Pacioli mette in evidenza il ruolo fondamentale dell'aritmetica e della geometria nelle arti meccaniche, nel commercio e nei mestieri; dall'altra insiste sulle garanzie di esattezza della conoscenza fornite dalle matematiche alle altre arti liberali e a tutte le discipline insegnate nelle Università (giurisprudenza, medicina, filosofia, teologia).

Non sono, però, soltanto l'utilità e la certezza a rendere la matematica universalmente applicabile. C'è una motivazione più radicale che Pacioli pone alla base del suo progetto: l'idea che il mondo sia stato creato da Dio per mezzo dei numeri, delle figure geometriche e delle proporzioni. La scienza delle proporzioni è estesa all'intero scibile umano non soltanto perché la geometria è una disciplina utile ed esatta ma perché il mondo stesso è costruito con le figure geometriche dei poliedri regolari, caratterizzati da una proporzione costante tra lo spigolo e il diametro della sfera nella quale sono inscritti.

La centralità epistemologica delle proporzioni è quindi inscindibilmente legata ad una immagine matematica del cosmo nella quale si fondono radici platoniche, cristiane ed euclidee: la proporzione – afferma, infatti, frate Luca - è indispensabile a tutti i mestieri, le arti e le scienze "peroché impossibile è alcuna cosa in natura persistere se la non è debitamente proportionata a sua necessità".

"E però la divina sapientia (commo dici Augustino in sua laude e commendatione) omnia fecit deus in numero, pondere et mensura; cioè che a ogni cosa dette la sua debita exigentia, considerata secondo el peso, el numero e la mesura; in le quali tre cose sempre se à retrovare la proportione; secondo la quale (commo summo opefice) cuncta bene disponit".

L'idea "metafisica" che guida il progetto culturale di frate Luca è che il libro del mondo sia stato scritto dalla Divina Sapienza con i caratteri della geometria e della matematica e con la "sintassi" delle proporzioni. Gli antichi filosofi, infatti, "chiaro cognoscivano che de niuna cosa in natura mai era possibile haver notitia, se la loro proportione non se intendeva. Conciosiacosa che, tutti li nostri studi di qualunche facultà si vogliano sienno per intender la convenientia da una cosa a un'altra". Le proporzioni, quindi, non solo costituiscono il fondamento delle *artes liberales* e di discipline come la medicina e il diritto, ma risultano necessarie anche per l'arte "de' sartori" e del "fabro lignario", per i "maestri de navi, barci, navilii, galee", per "l'arte ancora de militia" e del "fabroferraro", per "li testari e lanari", per i mercanti, per i "lapicidi e muratori" e per tutti gli

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> L. Pacioli, Summa de geometria, proportioni et proportionalita, Venezia, Paganini 1494, prima parte, c. 69r.

"artefici, maxime meccanici"<sup>2</sup>. "Se tu ben discorri – rileva infatti Pacioli - in tutte le arti tu troverai la proportione de tutte esser madre e regina e senza lei niuna poterse exercitare"<sup>3</sup>.

La centralità epistemologica delle matematiche e la connessa immagine geometrica del mondo sono due idee-chiave del pensiero di Pacioli che troveranno un felice e fortunato sviluppo durante la rivoluzione scientifica del XVII secolo. Sono le idee di un matematico del Rinascimento che si è formato nelle scuole d'abaco ed ha ibridato la cultura dei "pratici vulgari" con quella latina dei dotti. Luca dal Borgo, infatti, non è soltanto un docente di matematica ma è anche un *magister theologiae* che si è ispirato alle dottrine dell'ordine francescano. In che misura la sua immagine matematica della natura e della scienza è legata alla scuola teologica e filosofica francescana?

Si possono rintracciare legami testuali e concettuali fra il pensiero di Pacioli e quello della scuola francescana di Oxford?

Se si analizzano le riflessioni di Robert Grossatesta e Roger Bacon sull'uso delle matematiche nella scienza la "somiglianza di famiglia" con il progetto culturale di Pacioli appare evidente. Nel suo *Commentario* agli *Analitici secondi* di Aristotele, Robert Grossatesta (1170ca.-1253), che è il fondatore della scuola francescana di Oxford, sviluppa un'ampia riflessione sul metodo scientifico e dopo aver chiarito i principi e i procedimenti dimostrativi della filosofia naturale arriva alla conclusione che può definirsi propriamente scienza vera solo la matematica, che fornisce insieme conoscenza e dimostrazione e per questo è uno strumento imprescindibile per la fisica<sup>4</sup>.

La fondazione matematica delle scienze naturali viene sostenuta particolarmente nei trattati che concernono la luce e l'ottica: De luce, De motu corporali et luce, De lineis, angulis et figuris, De

<sup>2</sup> Risulta allora assolutamente centrale per Pacioli che ogni ambito dello scibile umano sia espresso tramite la lingua

Euclidis Megarensis, philosophi acutissimi mathematicorumque omnium sine controversia principis, Opera a Campano

della geometria e in particolar modo tramite la sintassi delle proporzioni. "Non solamente in lo numero e misura se ritrova la proportione, ma – sostiene Pacioli traducendo il commento del Campano al quinto libro degli *Elementi* - etiam in li soni, in li luogi e in li tempi, e in li pesi, in le potentie, si commo Plato affirma in suo Thymeo; la quale mai si ritrova in niuna cosa se non in quanto l'una è maggiore de l'altra, overamente una equale a l'altra. E questa è debita proprietà de la quantità; sì commo dice Aristotele neli *predicamenti*". L. Pacioli, *Summa de geometria, proportioni et proportionalita*, Venezia, Paganini 1494, c. 69r. Sul commento del Campano cfr. L. Pacioli, *Euclidis megarensis Opera a Campano interprete traslata*, Paganino de' Paganini, Venezia 1509, c. 32r-v. Con identiche parole Leonardo copia in uno dei suoi taccuini (Forster I) questa riflessione di Pacioli sulla natura universale delle proporzioni. La prima parte del codice (ff.1-40) è databile intorno al 1505. Cfr. Leonardo da Vinci, *Codici Forster*, edizione in facsimile a cura di A. Marinoni, Firenze, Giunti 1992. Cfr. anche C. Pedretti, *Leonardo. Le macchine*, Firenze, Giunti 2000, p. 38. Questo passo è la traduzione del commento del Campano alla terza proposizione del quinto libro degli *Elementi* di Euclide. Cfr.

*interprete fidissimo tra[s]lata...* Venezia, Paganino Paganini, 1509, f. 33r. <sup>3</sup> L. Pacioli, *Summa*, cit., distinctio VI, c, 68v.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> Cfr. Robertus Grosseteste, *Commentarius in Posteriorum Analyticorum Libros*, ed. Pietro Rossi, L.S. Olschki, Firenze 1981 (Corpus Philosophorum Medii Aevi. Testi e studi 2). Sul metodo scientifico di Grossatesta cfr. Alistair C. Crombie, *Robert Grosseteste and the Origins of Experimental Science 1100-1700*, Clarendon Press, Oxford 1953, pp. 37-60.

*iride*. La matematica infatti sebbene non sia sufficiente per rintracciare le cause degli effetti naturali, può descriverli<sup>5</sup>.

"L'utilità di considerare le linee, gli angoli e le figure – scrive Grossatesta nel *De lineis, angulis et figuris* – è grandissima, poiché senza di essi è impossibile capire la filosofia naturale...Tutte le cause degli effetti naturali devono infatti essere espresse per mezzo di linee, di angoli e figure, poiché altrimenti non si potrebbe avere conoscenza di questi effetti".

La certezza che la geometria conferisce alle ragioni dei fenomeni naturali costituisce il motivo di fondo della gnoseologia grossatestiana, alla quale si salda la visione cosmologica di origine neoplatonica, che spiegava la creazione come la moltiplicazione del punto di luce creato da Dio<sup>7</sup>.

Sullo studio sperimentale della luce e sulla sua analisi mediante l'ottica geometrica è incentrata anche l'opera di un altro grande maestro francescano di Oxford: Roger Bacon (ca1219-1292)<sup>8</sup>. Le riflessioni epistemologiche di Bacon sul ruolo della matematica sono finalizzate alla fondazione di una nuova scienza sperimentale e nella quarta parte dell' *Opus Maius* il francescano oxionese elenca ben otto ragioni a sostegno della sua tesi che solo la matematica si mantiene per noi certa e verificata<sup>9</sup>, per cui è attraverso di essa che occorre conoscere e comprovare ogni altra scienza<sup>10</sup>.

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> "I matematici - scrive Grossatesta - spesso conoscono la causa del risultato di una scienza inferiore: ma non ne conoscono l'oggetto, poiché non conoscono la causa del risultato nei suoi aspetti peculiari ma solo in quelli matematici ed universali". Robertus Grosseteste, *Commentarius in Posteriorum Analyticorum Libros*, cit., I, 12, ff. 11, vbb-12r.

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup> Die philosophischen Werke des Robert Grosseteste, Bischofs von Lincoln, ed. Baur Ludwig, Aschendorff, Münster 1912 (Beiträge zur Geschichte der Philosophie des Mittelalters 9) (scritti scientifici),in A.C. Crombie, Da S. Agostino a Galileo. Storia della scienza dal V al XVII secolo, tr. it. Milano, Feltrinelli 1970, pp. 226-227.

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup> Cfr. Panti Cecilia, *Moti, virtù e motori celesti nella cosmologia di Roberto Grossatesta. Studio ed edizione dei trattati «De sphera», «De cometis», «De motu supercelestium», SISMEL-Edizioni del Galluzzo, Firenze 2001 (Testi e studi per il «Corpus Philosophorum Medii Aevi» 16).* 

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup> Cfr. L. Tampellini, *Ruggero Bacone: un passaggio nodale all'origine della scienza moderna*, Siena, Cantagalli 2004.

<sup>9</sup> Le otto ragioni addotte da Bacon per dimostrare la necessità dell'uso della matematica nelle scienze sono: 1) "Aliae scientiae utuntur exemplis mathematicis"; 2)Mathematicarum rerum cognitio est quasi nobis innata"; 3) "Haec scientia prius est inter omnes partes philosophiae inventa"; 4) "Hac scientia est facillima"; 5) "Clerici licet rudissimi mathematicalis possint scire, quamvis ad alias scientias non valeant attingere"; 6) "Nata est nobis via ab his quae conveniunt statui et ingegnio puerili, quia pueri a nobis notioribus et primo addiscendis incipiunt"; 7) "Sed in mathematica tantum [...] sunt eadem nobis nota et naturae sive simpliciter. Quare ad intima illius scientiae possumus simpliciter attingere. Cum ergo hoc non valeamus in aliis, manifestum est quod base est magis nota. Quapropter ad ea sumensa est origo nostrae cognitionis"; 8) "In mathematica possumus devenire ad plenam veritatem sine errore et ad omnium certitudine sine dubitatione". *Fratris Rogerii Bacon Ordinis Minorum Opus maius ad Clementem Quartum, Pontificem Romanum, ex MS. Codice Dubliniensi, cum aliis quibusdam collato nunc primum edidit S. Jebb*, Londini 1733, pars IV, p. 65-70. Cfr. Tampellini, *Ruggero Bacone*, cit. pp. 39-49.

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup> Fratris Rogerii Bacon Ordinis Minorum Opus maius ad Clementem Quartum, Pontificem Romanum, ex MS. Codice Dubliniensi, cum aliis quibusdam collato nunc primum edidit S. Jebb , Londini 1733, pars IV, p. 63. "Come all'interno di una stessa scienza una sezione si rapporta ad un'altra, a modo di conclusione e di premesse, così una scienza si rapporta all'altra, come la conclusione alle premesse, per cui una scienza, che è piena di dubbi e disseminata di opinioni contrastanti e di oscurità, non può essere comprovata, chiarita, verificata, se non per mezzo di un'altra scienza nota e verificata, e per noi certa e sicura. Ma solo la matematica si mantiene per noi certa e verificata, per cui è attraverso di essa che occorre conoscere e comprovare ogni altra scienza".

erramus. Cum enim conclusiones & principia propria eis sint partes totalium scientiarum, sicut pars se habet ad partem, ut conclusio ad præmissa, sic scientia ad scientiam, ut scil. scientia, quæ est plena dubitationibus, & opinionibus respersa atque obscuritatibus, non valeat certificari, nec manifestari, mec verificari, nisi per aliam scientiam notam & verificatam, & nobis certam & planam, sicut est de conclusione per præmissa. Sed sola mathematica, ut prius habitum est, manet nobis certa & verificata in sine certitudinis & verificationis. Quapropter per hanc oportet omnes alias scientias sciri & certificari. Et quoniam jam per proprietatem istius scientiæ ostensum est, quod mathematica est prior aliis, & eis utilis & necessaria, nunc ostensitur hoc per rationes sumptas a parte sui subjecti. Et primo sic, quia nobis est via nata a sensu ad intellec-

La matematica, "porta e chiave di tutte le scienze"<sup>11</sup>, deve trovare applicazione nei più svariati campi del sapere: nella filosofia della natura, dove la ricerca delle cause dei fenomeni deve portare ad individuarne la struttura geometrica; nell'ottica, che fornisce il modello geometrico di tutti i meccanismi di causa-effetto; nella linguistica, dove determina le leggi della metrica; nella logica, e, infine, nell'esegesi della Bibbia, poiché contribuisce a chiarire tanti particolari del testo sacro, e fornisce utili esempi che aiutano a comprendere, per analogia, le verità soprannaturali<sup>12</sup>.

Lo studio delle matematiche quindi è propedeutico a quello di tutte le altre branche del sapere umano:

"Tutti i sapienti antichi approfondirono lo studio della matematica al fine di raggiungere conoscenze vere in ogni campo, come abbiamo visto fare da alcuni nostri contemporanei e abbiamo sentito di altri, i quali per mezzo della matematica poterono conoscere ogni altro tipo di scienza; infatti vi sono stati anche ai nostri tempi uomini famosissimi, come il vescovo Roberto di Lincoln [Roberto Grossatesta] e Adamo di Marsh e molti altri, i quali proprio grazie ai mezzi forniti dal sapere matematico poterono spiegare in maniera soddisfacente le cause di ogni altro fenomeno, sia umano che divino...È evidente quindi che la matematica è non solo utile ma assolutamente necessaria in tutte le altre scienze".

Sull'uso della matematica nella filosofia naturale da parte di Roger Bacon cfr. D. Ch. Lindberg, *On the applicability of mathematics to nature : Roger Bacon and his predecessors* in "British journal for the history of science" Vol. 15 (1982), p. 3-25

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup> Fratris Rogerii Bacon Ordinis Minorum Opus maius ad Clementem Quartum, Pontificem Romanum, ex MS. Codice Dubliniensi, cum aliis quibusdam collato nunc primum edidit S. Jebb , Londini 1733, pars IV, p. 57. "Sunt quatuor scientiae magnae, sine quibus caeterae scientiae sciri non possunt, nec rerum notitia haberi[...] et harum scientiarum porta et clavis est matematica". Le quattro scienze di cui parla Baocne sono la matematica, l'ottica, la scienza sperimentale e la morale, trattate nelle parti IV, V, VI, VII dell' Opus maius. Di queste la matematica è porta in quanto "chi la ignora non può conoscere le altre scienze né le cose di questo mondo" ed è chiave perché i suoi principi trovano applicazione in tutte le altre discipline.

Fratris Rogerii Bacon Ordinis Minorum Opus maius ad Clementem Quartum, Pontificem Romanum, ex MS. Codice Dubliniensi, cum aliis quibusdam collato nunc primum edidit S. Jebb, Londini 1733, pars IV, p. 67.

est propter quod & illud magis. Ad omnem autem confirmationem potest ratio ultima sumi ex experientia sapientum; nam omnes sapientes antiqui laborarunt in mathematica, ut omnia scirent, sicut nos pvidimus de aliquibus nostri temporis, & saudivimus de aliis, qui per mathematicam, quam bene sciverunt, omnem scientiam cognoverunt. Inventi enim sunt viri samosissimi, ut Episcopus Robertus Lincolniensis, & Frater Adam de Marisco, & multi alii, qui per potestatem mathematicæ sciverunt caussas omnium explicare, & tam humana, quam divina sufficienter exponere. Hujus autem rei certitudo patet in scriptis illorum virorum, ut de impressionibus, sicut de iride & de cometis, & de generatione caloris, & locorum mundi investigatione, & de cœlestibus & aliis, quibus tam theologia quam philosophia utitur. Quapropter manifestum est, quod mathematica est omnino necessaria & utilis aliis scientiis. Hæ ra-

La quarta parte dell' *Opus maius* (1267) di Bacon quindi, sulla scia dei maestri francescani di Oxford che il "doctor mirabilis" non manca di menzionare, presenta un ampio ed erudito progetto di matematizzazione dell'intero scibile umano che assomiglia per molti versi a quello presentato da Pacioli nella *Summa* più di due secoli dopo<sup>14</sup>. Eppure il francescano di Sansepolcro non cita mai nelle sue opere né Grossatesta né Bacone. Non esistono, inoltre, tracce nei libri di Pacioli che dimostrino inequivocabilmente che il francescano di Sansepolcro conoscesse le opere dei due grandi maestri di Oxford del XIII secolo. La metafisica e la fisica della luce<sup>15</sup>, tanto per fare l'esempio più evidente, sono del tutto assenti nei testi di frate Luca. Eppure un sottile filo concettuale che lega la scuola di Oxford a Pacioli è possibile rintracciarlo. La visione teologica e filosofica oxionese, infatti, ebbe delle significative ricadute nella fisica matematica del tardo Medioevo sia nella dottrina dell' *intensio e remissio formarum*, sia nell'uso delle proporzioni in cinematica<sup>16</sup>.

<sup>&</sup>lt;sup>14</sup> La quarta parte dell' *Opus maius*, in qua ostenditur potestas mathematicae in scientiis, & rebus, & occupationibus huius mundi, è una mastodontica trattazione degli usi della matematica che testimonia l'ampia cultura enciclopedica del "doctor mirabilis" e nell'edizione di Jebb occupa quasi 200 pagine! *Fratris Rogerii Bacon Ordinis Minorum Opus maius*, cit., pp. 57-255. Sul ruolo della matematica nella scienza di Roger Bacon cfr. N.W. Fisher – S. Unguru, *Experimental Sciences and Mathematics in Roger Bacon's Thought*, in "Traditio", 27 (1971), pp. 353-378.

<sup>&</sup>lt;sup>15</sup> Su queste tematiche cfr. L. Tampellini, Ruggero Bacone, cit., pp. 73-107.

<sup>&</sup>lt;sup>16</sup> Sui francescani e la scienza cfr. F. Bottin, Ruggero Bacone e Guglielmo di Ockham: alle origini di una scienza francescana, in I francescani e la scienza: atti della Giornata di studio: Istituto teologico di Assisi, Assisi, 9 ottobre 2006, in "Convivium Assisiense" a. 10, vol. 1 (2008), pp. 7-157, pp. 29-60

Le proporzioni applicate ai problemi del movimento nella Summa.

A queste due branche della fisica matematica si riferisce esplicitamente Pacioli nella sesta distinzione della *Summa* prospettando al lettore "alcune conclusioni de gran piacere a lo ingegno perspicaci" e inerenti all'applicazione delle proporzioni nello studio del movimento.

"Le quali cose son certo in molti luoghi e passi in libri di philosophia (maxime in quello *de celo et mundo*) te serviranno. Nel quale Aristotele sempre con força de propotioni e proportionalità se tene. E anche in lo libro de la sua *physica* presertim nel quinto, sexto, e septimo per tutto dove tratta de velocitate motuum. E così te serviranno in quello de intensione et remissione formarum. E per consequente a tutte le calculationi de Suisset e gli altri; siché a memoria le mandarai con loro exempli".

Santo al proposito e a lo inteto principale nostro se aspetti le gia vitte cose de le proportioni voglio sienno bastanti e oltra piu di loro non intendo dire. Se non che qui sequente mettaremo alcune conclusioni de gran piacere a lo ingegno perspicaci e vititi a electe e applicate secondo la sorsa e virtu de esse proportioni. Lequali cose son certo in mol ti suoghi e passi in libri de philosophia (marime in quello de celo z mundo) de seruiranno, de la sua physica presertis nel quinto/serto/e septimo/per tutto done tratta de rescento se la sua physica presertis nel quinto/serto/e septimo/per tutto done tratta de rescento se a tutte le calculationi de Suisset e glialtri:siche a memoria se mandarai con loro exempli ze. commo li appare.

Frate Luca, in questo brano si limita ad un fugace accenno alla teoria "de intensione et remissione formarum", ma questa dottrina costituisce un importante mutamento concettuale per la diffusione dell'uso della matematica nella trattazione di problemi fisici. La dottrina nacque in un contesto prettamente teologico per la soluzione di una questione sollevata nel XII secolo da Pietro Lombardo nel primo libro delle *Sentenze* (Liber I, distinctio XVII, cap. 60)<sup>18</sup>. Il teologo si domandava "se si debba ammettere che lo Spirito Santo possa accrescersi in una persona, [cioè] se sia possibile riceverne o darne una maggiore o minore quantità". Pietro Lombardo, come molti altri teologi del suo tempo, riteneva che la carità, cioè la grazia elargita dallo Spirito Santo non potesse variare da uomo a uomo poiché questo avrebbe comportato una variazione dello Spirito Santo e ciò era assolutamente inammissibile. Non restava altra soluzione alla questione che affermare la tesi che la virtù teologale della carità potesse aumentare o diminuire in un uomo ed essere più o meno "intensa" in tempi differenti. Ma come può una qualità variare quantitativamente? Nel capitolo VIII del libro sulle *Categorie* Aristotele spiega che non solo le qualità sensibili, ma anche quelle astratte,

<sup>&</sup>lt;sup>17</sup> L. Pacioli, *Summa*, prima parte c. 81v.

<sup>&</sup>lt;sup>18</sup> Magistri Petri Lombardi Sententiae in IV libris distinctae Spicilegium Bonaventurianum IV/V, Ed. Collegium S. Bonaventurae ad Claras Aquas, Roma 1971

come ad esempio la giustizia, presentano variazioni di grado, da persona a persona. Ciò nonostante quantità e qualità erano categorie assolutamente differenti. Il cambiamento qualitativo, infatti, avveniva sempre mediante la somma di parti continue o discontinue, per cui la parte più grande conteneva la più piccola, attualmente e realmente, senza che verificasse mutamento di qualità o di specie. Così Aristotele spiegava, ad esempio, il processo di crescita in altezza e in peso di un uomo. Nel cambiamento qualitativo, invece, sebbene, come nel caso del calore, si potessero registrare diversi gradi di "intensità", l'addizione o la sottrazione delle parti non comportava un cambiamento di qualità 19. Alla luce delle *Categorie* di Aristotele alcuni teologi, fra i quali San Tommaso, proposero una soluzione al problema sollevato da Pietro Lombardo ricorrendo al concetto di partecipazione. La carità elargita dallo Spirito Santo agli uomini era una qualità spirituale costante e se alcuni individui ne possedevano una quantità maggiore e altri minore questo dipendeva dal maggiore o minore grado della loro partecipazione ad essa.

Una seconda soluzione al problema sollevato da Pietro Lombardo fu però proposta da quei teologi che si schierarono contro Aristotele nella discussione della relazione fra qualità e quantità. Costoro elaborarono la teoria dell' *intensio et remissio qualitatum seu formarum*, che prevedeva che l'intensità di una qualità, come ad esempio il calore, potesse variare ed essere suscettibile di misurazione, proprio come la grandezza di una quantità. Una qualità, pertanto poteva essere accresciuta per addizione di nuove parti simili ad essa a una forma o qualità già preesistente. Se, ad esempio, fosse stato possibile estrarre il calore di un corpo ed aggiungerlo ad un altro corpo, il secondo sarebbe diventato più caldo. Ne sarebbe quindi derivata una forma unificata di intensità definitiva crescente. In modo analogo le qualità, compresa la grazia, potevano diminuire perdendo alcune loro parti, proprio come accadeva, ad esempio, al peso.

Questa seconda soluzione al problema teologico sollevato nelle *Sentenze* di Pietro Lombardo fu elaborata da una serie di teologi e la sua versione più ampiamente condivisa è legata al nome di un altro grande maestro francescano di Oxford: Giovanni Duns Scoto (ca1265-1308). Di questo autore Pacioli aveva sicuramente letto le opere, tanto è vero che lo cita più volte; ma quello che più conta è che sempre lo associa all'uso della matematica negli studi teologici. Nella lettere di dedica della *Summa* a Guidobaldo da Montefeltro (1494) frate Luca soffermandosi sull'uso delle matematiche in teologia cita, infatti, il pensiero "del nostro Sacro dottore Giovanni Scoto (maxime p°, 2°, 3° e 4° de le Sententie, dove summamente suo divino ingegno dimostrò)".

<sup>&</sup>lt;sup>19</sup> Aristotele, *Opere vol. I. Vita di Aristotele di Diogene Laerzio. Organon: Categorie, Dell'Espressione, Primi Analitici, Secondi Analitici*, Biblioteca Universale Laterza, Roma-Bari 1994 (quinta edizione).

E quattro anni dopo, nella lettera di dedica della *Divina proportione (1498)* a Ludovico il Moro Pacioli fa riferimento ad un preciso e specifico passaggio delle *Sentenze* di Duns Scoto<sup>20</sup>:

famosa coscquuta victoria debitaméte di pose. P Non paltri mesci anco ra ale grandi speculationi de sacra theologia el nostro subtlissimo Scoto puene senon pla notitia de le mathematici discipline come p tutte sue sa cre opere apare. Maxime se ben si guarda la questione del suo sedo libro dele sententie quado ingrendo domanda se langelo habia suo pprio edeterminato luogo a sua existetia i la gle ben demostra hauere inteso tutto el subtime volume del nostro perspicacissimo megarense psio Euclide.

Il riferimento di Pacioli al "dottor sottile" rappresenta più di un mero riconoscimento all'autorità teologica di un membro dell'ordine francescano. Frate Luca, infatti, sembra condividere pienamente le conseguenze epistemologiche della teologia di Scoto e una di queste conseguenze consiste appunto nella possibilità di una fisica matematica che riduce le differenze qualitative delle specie a differenza di struttura geometrica, di numero, di movimento, in una parola di quantità.

Ad Oxford fra il 1330 e il 1350 la dottrina dell'intensio et remissio formarum subì uno slittamento disciplinare, dalla teologia alla filosofia naturale, quando lo studio della variazione quantitativa delle qualità fu applicato allo studio del movimento. Lo studio delle variazioni concomitanti fra l'intensità (intensio) o "latitudine" di una forma e un'altra forma invariabile, nota come estensione (extensio) o "longitudine" (longitudo) consentì di esprimere la relazione funzionale fra la velocità e la distanza percorsa o fra la velocità e il tempo. In modo analogo a come la successione di forme di diversa intensità spiegava in teologia l'aumento o la diminuzione continua dell'intensità di una qualità come la grazia, così il succedersi delle diverse posizioni di un corpo in movimento poteva essere vista come una successione di forme che rappresentavano i diversi gradi di intensità di quel movimento.

L'accenno di Pacioli all'uso delle proporzioni nello studio del moto e la citazione nella *Summa* della dottrina "de intensione et remissione formarum", prelude, infatti alla spiegazione dei tre corollari cinematici "ex proportionibus" che chiudono il quinto trattato. In tutti e tre i casi si presuppone la validità di quella che potremmo chiamare, sulla scia di A.C. Crombie<sup>21</sup>, la "legge" aristotelica del moto, e cioè

$$v \propto \frac{p}{r}$$

<sup>&</sup>lt;sup>20</sup> R.P.F. Ioannis Duns Scoti, Doctor subtilis, ordinis minorum, reportata parisiensia, Libri secundi Sententiarum distinctiones sex, cum eisdem commentariis, Ludguvni 1639, t. 6. pt. 1.

<sup>&</sup>lt;sup>21</sup> A.C. Crombie, *Da S. Agostino a Galileo. Storia della scienza dal V al XVII secolo*, tr. it. Milano, Feltrinelli 1970, p. 250

che esprime la proporzionalità tra velocità (*v*), potenza movente del motore (*p*) e resistenza del mobile (*r*). Pacioli, in realtà, qui ha presente più che il testo aristotelico della *Fisica*, che pure cita insieme al *De coelo*, la dottrina "de intensione et remissione formarum" sviluppata all'Università di Parigi da Buridano, Nicola Oresme, Alberto di Sassonia e Marsilio di Inghen nel corso del XIV secolo e nata dalle ricerche dei *calculatores* del Merton College di Oxford, dei quali viene citato Suisset (Richard Swinehead, fl. C. 1344-1354), autore del *Liber calculationum* che con il suo soprannome di *Calculator* rappresenta anche gli altri oxionesi: Giovanni di Dumbleton, Guglielmo di Heytesbury e naturalmente il padre dei *calculatores* e cioè Thomas Bradwardine<sup>22</sup>.

Di Bradwardine, Pacioli menziona esplicitamente il *Tractatus proportionum*, che è una delle fonti che utilizza per scrivere la sesta distinzione della *Summa*<sup>23</sup>.

## Bistinctio sexta. I ractatus primus.

68

métione) la fiua epistola pricipaliter: de la pportione: pportionalita copose. Biordano ancora in la fiua arithmetica pure de la pportione e pportionalita parlo. Thomas beduardin fimiliter particulare trattato feci de le pportioni. Blasius de parma trattado de luna e lastra que certo suo copendio: de la pportione similmete tratto. Albertutius ancora de saronia psondo pho e sacro coctore de lordine nostro seraphyco: trattato pticulare copose de le ppotioni: elque mosto de scole ala tepesta nostra se riuolta. De sarchimandritta de si physosophanti plato-

L'attività dei quattro studiosi del Merton College di Oxford copre un periodo che va all'incirca dal 1328 al 1350. Le ricerche degli oxionesi prendono avvio dal *Tractatus de proportionibus* di Th. Bradwardine, composto nel 1328, e proseguono con gli studi di Guglielmo Heytesbury, autore di *Regule solvendi sophismata* (1335) e attivo a Oxford fino alla vecchiaia e di Giovanni Dumbleton, autore della *Summa de logicis et naturalibus*. Il filosofo citato da Pacioli è Riccardo Swineshead, contemporaneao di Heytesbury e *fellow* a Oxford sia nel 1344 che nel 1355. L'opera più importante di Swineshead è il *Liber calculationum*, che presumibilmente è all'origine del soprannome *Calculator* del suo autore e in genere di tutti i fisici oxionesi. Sulla cinematica del Merton College cfr. M. Clagett, *La scienza della meccanica nel Medioevo*, tr. it., Milano, Feltrinelli 1972, pp. 229-249; E. Grant, *Le origini medievali dela scienza moderna*, tr. it. Torino, Einaudi 2001, pp. 150-158.

<sup>&</sup>lt;sup>23</sup> Per la mole di carte che occupa (cc. 67v-98v) e per l'importanza della teoria in essa contenuta, la sesta distinzione è, infatti, una delle parti più rilevanti della Summa. Nei 6 trattati che la compongono Pacioli espone la teoria delle proporzioni e della proporzionalità, introducendo l'argomento mediante un breve excursus storico sui filosofi e i matematici più importanti che lo hanno preso in considerazione. Oltre a Euclide, che si occupa di proporzioni e proporzionalità soprattutto nel quinto libro degli Elementi, Pacioli cita Boezio, Ameto, Giordano Nemorario, Thomas Bradwardine, Biagio Pelacani e Alberto di Sassonia. Boezio si occupa di proporzioni e proporzionalità nell'ultima parte del secondo libro del De institutione arithmetica, dove espone la dottrina delle medietates, ovvero de i tre tipi di proporzionalità: aritmetica, geometrica e armonica (Anici Manlii Torquati Severini Boetii, De institutione arithmetica libri duo. De institutione musica libri quinque Accedit geometria quae fertur Boetii. E libris manuscriptis edidit Godofredus Friedlein, Lipsiae 1867). Ameto, "del qual molto el Campano exponendo el quinto de Euclide fa mentione", è il matematico arabo Ahmad ibn Yusuf, già menzionato nel Liber abaci di Fibonacci (Leonardo Pisano, Scritti di Leonardo Pisano, a cura di B. Boncompagni, Roma, 1857, vol. I, p. 119), vissuto nel X secolo e autore di una Epistola de proportione et proportionalitate alla quale si riferisce Pacioli. Giordano Nemorario, vissuto nel XIII secolo, è l'autore di un trattato De proportionibus e di una Arithmetica in dieci libri, che contiene un'ampia esposizione della teoria dei rapporti, alla quale fa riferimento frate Luca. Thomas Bradwardine (c.1290-1349) è autore, tra le altre cose, di un Tractatus de proportionibus velocitatum in motibus (1328) (Cfr. Crosby H.L. ed. Thomas Bradwardine, His "Tractatus de proportionibus", Madison, Wisconsin, 1955), che ispirò il Tractatus proportionum di Alberto di Sassonia (c. 1316-1390) e le Questiones super tractatu "De proportionibus" Thome Beduerdini di Biagio Pelacani da Parma (c. 1345-1416). E' in particolare il Tractatus proportionum di Alberto di Sassonia la fonte principale alla quale attinge Pacioli.

Thomas Bradwardine, grazie all'uso della teoria euclidea delle proporzioni aveva dato una soluzione nuova ad un problema sorto all'interno della spiegazione aristotelica del moto dei corpi. Secondo la "legge" di Aristotele, infatti, per ogni valore finito di potenza (p) e resistenza (r) dovrebbe esserci una velocità finita (v) dei corpi; invece, in realtà, se la potenza è uguale o inferiore alla resistenza essa potrebbe non riuscire affatto a muovere un corpo. Se si segue la legge di Aristotele allora per ridurre alla metà una velocità qualsiasi di un corpo o si dimezza la potenza o si raddoppia la resistenza. Si arriverà, quindi, ad un punto in cui la potenza diventa uguale alla resistenza e a quel punto il moto avrebbe dovuto cessare. Invece, dal punto di vista matematico il rapporto p/v è sempre maggiore di zero; e questo da un punto di vista fisico comporta la conseguenza assurda che una potenza, per quanto piccola, è sempre in grado di muovere qualsiasi resistenza, per quanto grande essa sia. Per risolvere l'anomalia sorta all'interno della fisica aristotelica Thomas Bradwardine nel *Tractatus de proportionibus velocitatum in motibus* (1328), che è un'opera di fisica matematica, utilizzava un teorema, tratto dal commento di Campano da Novara al V libro degli Elementi di Euclide, in cui si dimostrava che se

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$
 allora  $\frac{a}{c} = \left(\frac{b}{c}\right)^2$ .

Bradwardine, sulla base della nozione di "proporzione di proporzione" dimostrava quindi che se un rapporto fra potenza e resistenza produceva una velocità v (p/r=v) allora per raddoppiare questa velocità non si poteva prendere il rapporto 2 (p/r) ma  $(p/v)^2$ . Di conseguenza per dimezzare la velocità prodotta da un determinato rapporto fra potenza e resistenza occorreva prendere la radice quadrata del rapporto  $\sqrt{\frac{p}{r}}$ . In base all'analisi di Bradwardine pertanto se p è iniziamente maggiore di r, e un corpo si è mosso ad una certa velocità v, p non potrebbe diventare mai uguale o inferiore a r, poiché la riduzione a metà della velocità v non è più ottenuta dimezzando p o raddoppiando r ma prendendo la radice quadrata del loro rapporto<sup>24</sup>. La soluzione di Bradwardine quindi presupponeva che le proporzioni in gioco nei problemi cinematici fossero sempre da intendere come proporzioni geometriche. Sulla scia di Bradwardine divenne abituale al Merton College di Oxford trattare i problemi cinematici con strumenti matematici.

I *calculatores* non appartenevano all'ordine francescano. Eppure la matematizzazione della fisica di cui furono protagonisti si deve collocare all'interno della cornice teologica e filosofica francescana che grazie a Robert Grossatesta, Roger Bacon, John Peckham, Duns Scoto e Guglielmo di Ockham, aveva reso epistemologicamente possibile quantificare le qualità e matematizzare così i fenomeni fisici.

-

<sup>&</sup>lt;sup>24</sup> Cfr. A.C. Crombie, *Da S. Agostino a Galileo*, cit. pp. 257-259.

La dottrina dell'intensio et remissio qualitatum seu formarum, sebbene introdotta da Pacioli in modo occasionale nel mezzo di una trattazione matematica della teoria delle proporzioni, gioca un ruolo importante nel progetto di estensione della matematica a tutto lo scibile delineato nella Summa. Il metodo elaborato ad Oxford e Parigi nel corso del XIV secolo si proponeva infatti di esprimere numericamente le quantità di cui una qualità o "forma" aumentava o diminuiva in relazione a una scala fissa. In altri termini, si trattava di un modo di esprimere quantitativamente la variazione di una "forma", come ad esempio, la luce, il calore, o anche il moto locale. L'intensio, o "latitudine", era esprimibile con un numero e pertanto si poteva parlare della proporzione con la quale l'intensio della velocità variava in relazione a una "forma" mantenuta invariabile (l'extensio o longitudine), - in questo caso la distanza percorsa dal mobile. L'idea di poter affrontare lo studio del moto mediante le proporzioni, come teorizzato dai fisici di Oxford e Parigi, non poteva che costituire agli occhi di frate Luca un brillante esempio della necessità dello studio delle proporzioni anche per la filosofia naturale<sup>25</sup>. Pacioli non entra nel merito delle varie e complesse sfaccettature della fisica tardomedievale, ma si limita ad illustrare tre corollari cinematici sulla scorta dell'autorità di Alberto di Sassonia (1316-1390), "profondo philosopho e sacro dottore dell'ordine nostro serafico", come ama ricordarlo Pacioli.

Alberto di Sassonia insegnò a Parigi e fu rettore della Sorbona nel 1353. Scrisse opere di logica (*Quaestiones logicales* c. 1356; *Perutilis Logica*)<sup>26</sup>, matematica (*Tractatus proportionum*, c. 1353)<sup>27</sup>, e fisica<sup>28</sup>. Il francescanesimo di Alberto di Sassonia è rintracciabile sia nei suoi trattati logici in riassume ed espone i temi centrali della *logica modernorum*, ispirata alle idee di Guglielmo di Ockham, sia nell'applicazione dei metodi matematici alla fisica che emerge nelle *Quæstiones in Aristotelis De cælo* dove sviluppa la teoria dell'*impetus* di Buridano. Pacioli tuttavia si riferisce esclusivamente al *Tractatus proportionum*, che grazie all'insegnamento di Biagio Pelacani, si diffuse ampiamente in Italia e conobbe uno strepitoso successo editoriale che vanta ben 6 edizioni a stampa tra il 1482 e il 1506<sup>29</sup>.

<sup>&</sup>lt;sup>25</sup> Sulla diffusione in Italia della teoria delle proporzioni dei *calculatores* oxionesi e dei fisici parigini cfr., oltre a M. Clagett, *La scienza della meccanica nel Medioevo*, cit., pp. 703-713; C. Maccagni, *Le scienze nello studio di Padova e nel Veneto*, in *Storia della cultura veneta*, Vicenza Neri-Pozza, 1981, vol. 3/III, pp. 151-156; G. Federici Vescovini, *La questio de intensione et remissione formarum di Biagio Pelacani da Parma*, in "Physis", XXXI, 1994, pp. 433-535; F.P. Raimondi, *Pomponazzi's Criticism of Swineshead and the decline of the Calculatory tradition in Italy*, in "Physis", vol. XXXVII (2000), pp. 311-358.

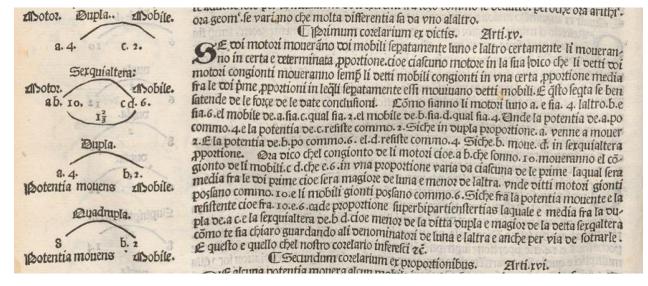
<sup>&</sup>lt;sup>26</sup> Perutilis Logica Magistri Alberti de Saxonia, Venetiis 1522. Cfr. Quaestiones circa Logicam: Twenty-Five Disputed Questions on Logic, trans. Michael J. Fitzgerald, Dallas Medieval Texts and Translations 9, Louvain and Paris: Peeters, 2010.

<sup>&</sup>lt;sup>27</sup> Tractatus proportionum: Der Tractatus proportionum von Albert von Sachsen, Osterreichische Akademie der Wissenschaften, math.-nat. Klasse, Denkschriften 116(2):44–72. Springer, Vienna, 1971.

<sup>&</sup>lt;sup>28</sup> Questiones subtilissime in libros Aristotelis de caelo et mundo, Venetiis, 1492. Cfr. Alberti de Saxonia Quæstiones in Aristotelis De cælo critical edition by Benoit Patar, Leuven, Peeters Publishers, 2008.

<sup>&</sup>lt;sup>29</sup> L'opera fu pubblicata a Padova nel 1482, 1484 e 1497 e poi a Venezia prima nel 1487 e nel 1494. Nel 1506 a Bologna ne uscì una edizione commentata da Benedetto di Faenza, *Benedicti Victorii Faventini Commentaria in* 

Il primo problema che frate Luca presenta nella Summa è contenuto nell'articolo XV del quinto trattato della sesta distinzione:



Primum corelarium ex dictis

"Se doi motori moveranno doi mobili separatamente, l'uno e l'altro certamente li moveranno in certa e determinata proportione; cioè ciascuno motore in la sua. Dico che li detti doi motori congionti moveranno sempre li detti mobili congionti in una certa proportione media fra le doi prime proportioni, in le quali separatamente essi movivano detti mobili<sup>30</sup>.

Dati i motori a e b, dotati di una "potentia movente" rispettivamente di 4 e 6 e i mobili c e d, che hanno una "potentia resistente" di 2 e 4, la proporzione tra moventi e mossi, presi separatamente (a muove  $c \in b$  muove d) è nel primo caso dupla (4:2=2), nel secondo sexquialtera (6:4=3/2). L'unione dei due motori (a+b=10) muoverà i due mobili (c+d=6) con una proporzione media fra le due precedenti. "Siché fra la potentia movente e la resistente, cioè fra 10 e 6 cade proportione superbipartientestertias [5/3], la quale è media fra la dupla de a.c. e la sexquialtera de b.d., cioè menor de la dupla e magior de la detta sequialtera, commo se fia chiaro guardando ali denominatori de l'una e l'altra".

In questo primo corollario, sfruttato anche da Galilei per dimostrare l'incoerenza della proporzionalità tra peso e velocità di caduta di un grave<sup>31</sup>, la proporzione cade tra due "potentie", quella movente e quella resistente. Nel secondo invece entra in gioco in modo esplicito il concetto di velocità.

Tractatum Proportionum Alberti de Saxonia. Thome Bravardini Anglici, Tractatus Proportionum perutilis, Bologna 1506.

<sup>&</sup>lt;sup>30</sup> L. Pacioli, *Summa*, c. 83v.

<sup>&</sup>lt;sup>31</sup> G. Galilei, Discorsi e dimostrazioni matematiche introno a due nuove scienze, giornata prima, in Opere, cit., Ed. Naz. VIII, pp. 106-109.

E alcuna potentía mouera alcun mobile in qualunche pportione si voglia: sempre gila tal potentia ppria se la sia méata ouer augumétata sedo la pportione che ella hauera al suo mobile/sensa sallo essa poi mouera vitto mobile in tanto piu veloci quanto che ella sera méata: ouer augumentata sedo vitta pportione. Exemplu sia la potentía mouente. a.e. sia 4.el mobile sia.b.e sia. 2.stra quali cade, pportione oupla e in tal pportione.a. moue.b. Or vico se multiplichi vetta po a secondo vita pportione lasse e vupla. conca se si copia la po a sera 8.sia vetta méata sedo la proportione fra a. el.b. siche. 8.poi mouera.b. el copio piu veloci che prima

#### Secundum corelarium

"Se alcuna potentia moverà alcun mobile in qualunche proportione si voglia sempre quella tal potentia propria, se la sia mancata over augumentata secondo la proportione che ella haverà al suo mobile, sença fallo essa poi moverà ditto mobile in tanto più veloci quanto che ella serà mancata over augumentata secondo detta proportione".

Pacioli segue la cinematica aristotelica nell'istituire la proporzionalità tra i rapporti delle "potentie" (moventi e resistenti) e i rapporti tra le velocità dei mobili. In questo, come in altri casi, la coerenza della teoria delle proporzioni viene piegata alle esigenze dell'applicazione pratica. La velocità, infatti, è una grandezza che risulta da un rapporto fra due grandezze ad essa non omogenee e ciò pone un problema di rigore con la definizione di proporzione e di proporzionalità, che frate Luca risolve grazie alla nozione di "proporzione composta"<sup>32</sup>.

Il secondo corollario afferma che se una "potentia movente" a=4 muove un mobile b dotato di resistenza 2, produce una velocità data dalla "proportione dupla", allora una potenza movente doppia c=2a, muoverà lo stesso mobile b, con velocità doppia. Pacioli qui volgarizza la "quarta conclusio" del Tractatus proportionum di Alberto di Sassonia<sup>33</sup>.

Quando si parla di proporzione in ambito cinematico – precisa frate Luca - ci si riferisce sempre alla proporzione geometrica. Non vale, infatti, la proporzionalità "secondo li excessi over differentie. Conciosia che la proportionalità de li moti sequiti l'ordine de la proportionalità geometrica e non arithmetica commo sempre per tutti philosophi è concluso. Peroché se la se havesse a intendere secondo l'arithmetica sequitaria molti inconvenienti (ut deducit famosus doctor nostro Albertutius de Saxonia in tractatu que edidit *de proportionibus*, in 4ª conclusione sua).

<sup>33</sup> Benedicti Victorii Faventini Commentaria in Tractatum Proportionum Alberti de Saxonia. Thome Bravardini Anglici, Tractatus Proportionum perutilis, Bologna 1506, c. 28r.

<sup>&</sup>lt;sup>32</sup> Sulla "proporzione composta" in Pacioli cfr. A. Ciocci, *Luca Pacioli e l'albero delle proporzioni*, in E. Giusti e M. Martelli (a cura di), *Pacioli 500 anni dopo*, Atti del Convegno di Studi Sansepolcro 22/23 maggio 2009, Lama, L'Artistica, 2010, pp. 59-96

Tra gli altri "inconvenienti" Pacioli riporta il seguente paradosso, tratto dal *Tractatus proportionum* di Alberto di Sassonia<sup>34</sup>: se nel rapporto fra potenza movente e mobile si considera la proporzione aritmetica allora "sequiteria che 3 movessero 4 e che 4 movesen 4. Le quali cose manifestamente son false e impossibili apresso ciascuno intellecto". Il ragionamento di Alberto di Sassonia, compendiato da frate Luca, può essere così ricostruito.

Quarta cóclusio si fuerit aliqua po/ tentia mouens suum mobile in pro/ portione dupla eadem porétia dupli/ cara mouebir idem mobile precise in duplo uelocius.uerbi gratia: sit.a.po/ renria ut quatuor mobile.b.ut duo.c. potentia duplicara sicur octo tune ga pportio.c.ad.b.componit ex ppor rione.c.ad.a.er.a.ad.b.tanqua ex p/ portionib9 sibi inuicem equalibus sei quit per suppositionem secunda pros portionem.a.ad.c.esse precise duplam ad qualibet istarum et per consequens per quartam conclusionem seguit ue locitarem qua.c.mouer. b.esse precise duplam ad uelocitaté q.a. mouer.b.

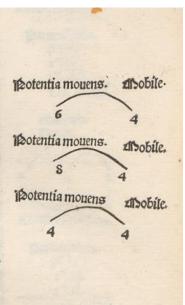
Alberto di Sassonia, Tractatus proportionum, Bologna 1506, c. 28r

Data una potenza di 6 che muove un mobile di 4, se si aumenta la potenza "secondo la sua differentia", cioè secondo la proporzione aritmetica, allora si avrà una potenza di 8, che dovrebbe muovere lo stesso mobile 4 con una velocità doppia rispetto alla precedente ("in doi tanto più presto che non facia 6"). Ora, dal momento che il mobile 4, "sì commo prova Aristotele nel 7° libro de la sua Physica", si può muovere con una velocità dimezzata ("el dopio più tardo"), occorrerà diminuire la potenza iniziale di quella proporzione aritmetica che si è aggiunta precedentemente alla potenza iniziale di 6 per raddoppiare la velocità; e quindi si avrà una potenza di 6-2=4.

,

<sup>&</sup>lt;sup>34</sup> Alberto di Sassonia (1316-1390 ca.), fu allievo di Buridano a Parigi e si distinse per i suoi commentari al *De caelo* e alla *Fisica* di Aristotele (*Questiones subtilissime in libros de celo et mundo Aristotelis* e *Questiones... in octo libros physicorum Aristotelis*) successivamente pubblicati a stampa rispettivamente a Venezia (1492) e Parigi (1516,1518). L'opera alla quale si riferisce Pacioli, però, è il *Tractatus proportionum*, disponibile anche a stampa, perché pubblicato a Venezia nel 1487.

Z notanter viri scoo la pportione fra lozo:acio tu no intendesse tale augumeto ce potentia conerse sare scoola postione arithmetica. Deroche sarebe salso se tu intendesse la pportione secondo li excessi ouer orie. Conciosia che la pportionalita de li moti se quiti lozdine de la pportionalita geometrica e non arithmetica.commo fempre per tutti phy lofophi fi e concluso. Deroche se la se hauesse a intendere secondo larithmetica: segtaria molti incouenienti (vi veducit famolius voctor në Albertutius ve saronia in tractatu quë edidit ve pportionibus psertim in.4°. octusione sua) Ande ve gsto segtaria che.3. mouesiero.4.e che.4. mouesen.4. Legli cose manifestamete son salse e ipossibili apresso ciascuno intellecto.e che cio the leguise cosi lo puo e sia che 6 moua. 4 vnde se tu wi meare la potentia ve 6 arithmetice: fara. 8. cioe augumetaria scoo la sua ofa: E cost haueremo che. 8. mouera. 4. E si virestiche mo uera. 4. in coi tanto piu pso che no sacia. 6. scoo questa via alsa pche. 4. ancora si po mouer el Topio piu tardo: fi como proua. Ap. nel. vij. libro de la fua phyfica. Dimadase per gito da che potentía. 4. sera mosso. Sara bisogno vire si como p laugumento ve la visa ala potetía che se di 8. Elqual sevo questo senso so vitto mouere. 4. in vuplo velocius che ancora per ablatione ce ditta pria da la detta potentia se había amouere il opio piu pigro. Donca se da.6. se seua. 2. restara. 4.p to motore e cosi. 4 mouería. 4 che non e possibile: quía ab equalibus non puenít monus:ne ancora va la pportione ve minor inequalita. E se tu vicesse che coppiata potentia: moue il coppio piu veloci:como. 12.4 cofi fmessata potentia couera mouer el coppio piu tar do. Adonca lequiria che. 3. monesle. 4. quod est ipossibile p iam victa. Se veue adonca in tendere li crementi e decrementi e mcationi e augumetationi de ditte potentie sopra le sue re fistentie semp geometrice z no arithmetice p molti incouenienti che segtarieno fi como in pte le sopra Deducto. Al Sarime ancora in libro De celo z mundo. Ideo zc.



L. Pacioli, Summa, c.84r

Ma a questo punto "4 moveria 4 che non è possibile" poiché – secondo la filosofia naturale di Thomas Bradwardine, condivisa anche da Alberto di Sassonia<sup>35</sup> - "ab aequalis non pervenit motus, né ancora da la proportione de minor inequalità. E se tu dicesse che doppiata potentia move il doppio più veloci commo 12.4. così smeççata potentia doverà mover el doppio più tardo. Donca sequiria che 3 movesse 4, quod est impossibile". Da questa *reductio ad absurdum* Pacioli conclude che nella cinematica "se deve adonca intendere li crescimenti e decrementi e mancationi e augumentationi de ditte potentie sopra le sue resistentie sempre geometrice e non arithmetice". In altri termini occorre sempre considerare l'aumento o diminuzione dei rapporti e non delle differenze tra potenze moventi e potenze resistenti dei mobili.

Il terzo ed ultimo corollario cinematico riguarda i rapporti tra potenza movente, resistenza e velocità di una parte di mobile che abbia con il tutto la stessa proporzione che ha l'intero mobile con la potenza movente.

#### Tertium corelarium

Se alcuna potentia moverà alcun mobile in quanlunca proportione si voglia, quella medesima potentia moverà la parte de quello tal mobile ala qual tutto esso mobile se haverà in la propria proportione che se à la detta potentia a tutto ditto mobile. Dico quando questo così sia, ditta potentia moverà la preditta parte il doppio più veloci che prima non faciva tutto el mobile.

<sup>&</sup>lt;sup>35</sup> La teoria secondo la quale si ha il moto soltanto se p/r >1, alla quale ricorre Pacioli, subì revisioni e critiche nel *Tractatus de proportionibus* (1328) di Th. Bradwardine. Cfr. a questo proposito A.C. Crombie, *Da S. Agostino a Galileo*, cit., pp. 257-258; E. Grant, *Le origini medievali della scienza moderna*, cit., pp. 131-149.

In altri termini se una potenza a=8 muove un mobile b=4 con una velocità  $v_1$ , allora la stessa potenza a, muoverà c=2, che è la parte di b tale che a:b=b:c, con una velocità  $v_2=2v_1$ .

Estium coreatium.

Estium coreatium.

Estium potentia mouera alcun mobile in qualunche pportione si walia quella mediama potentia mouera alcun mobile in qualunche pportione si walia quella mediama potentia mouera la pete ve gillo tal mobile ala qual tutto esso mobile se pauera in ppira pportione che se a la vetta potentia a tutto vitto mobile. Dio quando que solico coa se tu prendi ma pre vel vetto mobile coa «e. s. mona. 4. fra quali cade pportion vupla. Dico ora se tu prendi vua pre vel vetto mobile coa «e. s. mona. 4. fra quali cade protione a. 4. tutto mobile quale «. 4. s. c. che la potentia alora ve. 8. mona. 4. fra quali cade protione a. 4. tutto mobile quale «. 4. s. c. che la potentia alora ve. 8. mona quella tal parte el coppio in veloci che pina non sacua. 4. Emde la parte vel mobile in vitta pportione se quello si code e. 2. poche si como «4. estiboluplo a. 8. cosi. 2. e sibbluplo a. 4. tutto mobile geometrice loquendo exico che. 8. mouera. 2. el voppio pin veloci che prima e quella 3. covelarii a tuo piacere ve cose varie e grande vitilità in molti passi veloci che prima e quelli 3. covelarii a tuo piacere ve cose varie e grande vitilità in molti passi veloci che prima e quella su considerate in la materia vel e poportioni e pportionalità mettaremo varie e viuerse regole a le quantita proportionali pertinenti. Lequali sensa vubio ala pratica ve lo operare ve numeri e matime ve radide Alla passi in protiona e protionalità mettaremo varie e viuerse regole a le quantita proportionali pertinenti. Lequali sensa vubio ala pratica ve lo operare ve numeri e matime ve radide Alla solicità in considera de la via in tal parte operare: matime ve radide Alla solicità in considera de la via in tal parte operare: una moto che mai cercando con viligentia ne li mei primi annice anchepoi in nun luogo ne tronai cosa chiara. El perche hauendo so papa in me quello anche in altri nostri posteri penso. El cui dobiequi co di tutto sindore e socia mi me quello anche in altri nostri posteri penso. El cui dobiequi co di tutt

Con questo ultimo esempio cinematico si conclude il quinto trattato della sesta distinzione, scritto da frate Luca per mostrare ai pratici come anche in filosofia naturale sia necessario l'uso delle proporzioni e della proporzionalità<sup>36</sup>.

#### Conclusioni

In questi tre problemi cinematici della *Summa* si possono scorgere le tracce di un percorso della scienza medioevale che arriva Luca Pacioli partendo dalla scuola francescana di Oxford. Se, infatti, nelle pagine della *Summa*, ripercorriamo a ritroso il filo del francescanesimo ci imbattiamo in un importante teologo francescano citato da Pacioli e cioè Duns Scoto. Il "doctor subtilis" è probabilmente il più famoso discepolo della scuola francescana di Oxford ed è anche dal punto di vista teologico il più autorevole sostenitore della dottrina *de intensio et remissio formarum*. Quando questa dottrina, che riduceva le qualità a variazioni quantitative, nel corso del XIV secolo subì uno slittamento disciplinare dalla teologia alla filosofia naturale diede avvio ad un programma di ricerca

<sup>&</sup>lt;sup>36</sup> L. Pacioli, *Summa*, c. 84r. "E questi 3 corelarij a tuo piacere de cose varie e grande utilità in molti passi de philosophia sieno bastanti. E qui sequente in la materia de le proportioni e proportionalità mettaremo varie e diverse regole a le quantità proportionali pertinenti. Le quali sença dubbio ala pratica de l'operare de numeri e maxime de radici e algebra in la qual parte molti difficili casi ocurrano quali sença la evidentia de le infraponende regole male se poterien solvere".

scientifico, realizzato dai calculatores al Merton College di Oxford, fondato sulla matematizzazione della fisica. L'uso delle proporzioni nella soluzione di problemi cinematici nel corso del XIV secolo divenne comune anche nella scuola parigina di Oresme e Buridano e si diffuse in Italia soprattutto grazie alle opere di Alberto di Sassonia e agli insegnamenti di Biagio Pelacani da Parma. La fonte diretta dalla quale frate Luca riprende i tre corollari cinematici contenuti nella Summa è il Tractatus proportionum di un altro francescano: Alberto di Sassonia. Un'eco della impostazione matematica della scienza francescana, che nel XII secolo Grossatesta e Roger Bacon avevano formulato ad Oxford, giunge quindi fino a Pacioli tramite Alberto di Sassonia.

I tre problemi cinematici contenuti nella Summa, tuttavia, sono soltanto un piccolo dettaglio di un'immagine della natura che trova in frate Luca un cruciale punto di passaggio tra Medioevo ed età moderna. Il progetto di matematizzazione dell'intero scibile umano promosso da Pacioli, infatti, da un lato recepisce le istanze teoreticamente più feconde della scienza francescana medioevale, dall'altro proietta verso l'età moderna un'antica-nuova concezione matematica della natura.

Le radici culturali dalle quali emerge la sua immagine matematica del mondo sono costituite indubbiamente da tre componenti principali: una visione teologica francescana, maturata durante gli studi degli inizi degli anni '80 e intrapresi per diventare Magister Theologiae; un platonismo di fondo, che, sebbene non derivi dalla lettura diretta del Timeo di Platone ma dai Commenti di Campano al XIII libro degli *Elementi*, corrobora la sua concezione matematica del cosmo, fondata sulla dottrina dei poliedri regolari; e, soprattutto, una passione assoluta, incondizionata e totale per la geometria di Euclide. Di queste tre componenti quella prevalente è l'ultima. Di Euclide, infatti, Pacioli non fu soltanto il più ostinato e infaticabile divulgatore ma anche uno dei principali fautori della sua rinascita.

Se si esaminano le opere di frate Luca, infatti, appare evidente la presenza costante degli Elementi. Nella seconda parte della Summa<sup>37</sup>, che contiene il trattato di geometria ricalcato sul codice Palatino 577 della Biblioteca Nazionale di Firenze, è contenuta, infatti, la volgarizzazione dei libri, I, II, III, IV, VI e XI. Occorre rilevare inoltre che nella prima parte della Summa, nella prima distinzione, dedicata all'aritmetica speculativa, compaiono definizioni e proposizioni del VII, VIII e IX degli *Elementi* <sup>38</sup>; nella sesta distinzione, compaiono ampi stralci del V libro degli Elementi, dedicati alle proporzioni<sup>39</sup>; e, nell'ottava distinzione, alle carte 119v-143r, è contenuta

<sup>&</sup>lt;sup>37</sup> Sulla presenza e l'uso degli *Elementi* nella seconda parte della *Summa* mi sia consentito rinviare a Cfr., A. Ciocci, Luca Pacioli e la matematizzazione del sapere nel Rinascimento, Bari, Cacucci, 2003, pp. 245-49.

<sup>&</sup>lt;sup>38</sup> Cfr. A. Ciocci, Luca Pacioli e la matematizzazione del sapere nel Rinascimento, cit., pp. 179-183.

<sup>&</sup>lt;sup>39</sup> Nelle carte 69r-82v. Pacioli espone la teoria delle proporzioni sulla base di molteplici fonti. Le definizioni e le proposizioni del V, VI, e VII libro degli Elementi di Euclide che Pacioli ricava dall'edizione del Campano si intrecciano, tuttavia, con icitazioni da Boezio, Giordano Nemorario, Thomas Bradwardine, Biagio Pelacani e soprattutto Alberto di Sassonia, del quale frate Luca utilizza ampiamente stralci tratti da Tractatus proportionum, pubblicato a Venezia nel 1480.

un'ampia esposizione del libro X, che tratta delle grandezze irrazionali<sup>40</sup>. Nella *Divina proportione*, poi, frate Luca volgarizza anche il libro XIII, dedicato alla sezione aurea e alla costruzione dei poliedri regolari, e riassume brevemente i libri spuri XIV e XV dell'opera euclidea<sup>41</sup>.

In breve, gli *Elementi*, anche se numerizzati e spesso ridotti ai soli enunciati delle proposizioni privi della dimostrazione geometrica, costituiscono il filo conduttore della diffusione delle conoscenze matematiche ai tecnici intrapresa da Pacioli. L'immagine di frate Luca dal Borgo divulgatore di Euclide appare, infatti, anche nel celebre dipinto di Capodimonte che lo ritrae alle prese con il testo degli *Elementi*, illustrato mediante il disegno geometrico e i modelli materiali dei poliedri<sup>42</sup>. Pacioli, del resto, più volte afferma di aver insegnato Euclide a tecnici militari, come Camillo Vitelli e Gian Giacomo Trivulzio in occasione del suo soggiorno a Napoli, o Giangaleazzo Sanseverino negli anni di permanenza a Milano<sup>43</sup>.

L'opera di Euclide è la seconda Bibbia di Pacioli; ma non è soltanto il manuale su cui si fonda il suo apostolato matematico fra i dotti e i tecnici del Rinascimento. È anche l'opera principale dalla quale trae ispirazione per la sua immagine della natura come ordine matematico strutturato in base alla sintassi delle proporzioni e in particolare fondato sulla "divina proportione". Frate Luca innesta la visione euclidea del mondo naturale sul tronco della scienza e della teologia francescana, e ispirandosi al *Timeo* di Platone elabora una nuova immagine della natura.

Questa antica-nuova immagine matematica del mondo costituirà lo sfondo metafisico della scienza moderna. Ed in questa anticipazione della modernità Pacioli è un personaggio emblematico del Rinascimento, una lente di ingrandimento del suo tempo. Ancorato fortemente al Medioevo ma attento catalizzatore delle novità dell'Umanesimo e del Rinascimento, Luca dal Borgo disegna lo schizzo di una nuova filosofia della natura e indica al XVI secolo la strada euclidea per scoprirne le leggi. La componente francescana di questa nuova immagine della scienza, sebbene apparentemente imperscrutabile, costituisce l'innegabile sfondo teologico ed epistemologico nel quale si colloca l'opera di Pacioli.

<sup>&</sup>lt;sup>40</sup> Cfr., A. Ciocci, Luca Pacioli e la matematizzazione del sapere nel Rinascimento, cit., pp. 204-210

<sup>&</sup>lt;sup>41</sup> Cfr., A. Ciocci, Luca Pacioli e la matematizzazione del sapere nel Rinascimento, cit., pp. 109-112.

<sup>&</sup>lt;sup>42</sup> Sul *Doppio ritratto* cfr. A. Ciocci, *La vita e le opere di Luca Pacioli*, UB, Umbertide 2017, pp. 7-41.

<sup>&</sup>lt;sup>43</sup> Sulla permanenza a Napoli il frate afferma di essersi intrattenuto "con la illustre signoria di miser Giovan Giacomo Traulzi; con lo degno oratore del dominio fiorentino alhora Pietro Vetori, con presenza del Pontano nel palazzo del conte de Sarno in Napoli; e non manco con lo magnifico e degno condottiero signore Camillo Vitelli de la Cità de Castello, legendoli io per tre anni el sublime volume del nostro Euclide" (L. Pacioli, *Divina proportione*, Venezia 1509, c. 24r).