Il *De Analysi* di Newton e l'inizio del calcolo

Sansepolcro, Ottobre 2017

Non solo ‘de analysi’

Il titolo completo del quale occorre tener conto: *De analysi per æquationes numero terminorum infinitas*.
Si tratta di una ‘analisi’ che deve essere seguita dalla ‘sintesi’? [1]

Ecco comunque come Newton presenta questo scritto:

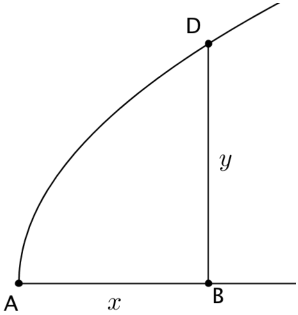
> *The General Method, which I have devised some considerable Time ago, for measuring the Quantity of Curves, by Means of Series, infinite in the Number of Terms, is rather shortly explained, than accurately demonstrated in what follows.*[2]

---

[1] Si veda [2, vol. 1, nota 28, p. 12] per la lettura di Newton dei classici greci.

[2] Cito dalla traduzione inglese di Stewart (1745) in [1]. Ma occorre tener conto anche dell’edizione di Whiteside in [2, vol. 2, pp. 206-247].

Una figura tipica come riferimento



La base AB di *una curva arbitraria* è x, l'ordinata perpendicolare BD è y. Nel seguito z indicherà l'area della regione ABD.
Nelle considerazioni seguenti, poi $a, b, c, \&.$ sono quantità date; m, n sono numeri interi.

La prima regola

Regola 1

Se $ax^{\frac{m}{n}} = y$ allora

$$\frac{an}{m+n}\, x^{\frac{m+n}{n}} = \text{Area}\, ABD. \quad \square$$

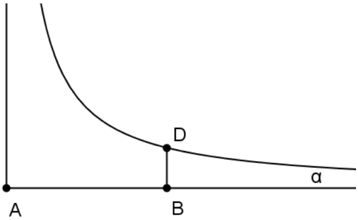
Newton dà alcuni esempi:

1. Se si ha $x^2 = (1 \cdot x^{\frac{2}{1}}) = y$, ossia se $a = 1 = n$ e $m = 2$; si ha $\frac{1}{3}x^3 = \text{ABD}$.

2. Supponiamo che sia $4\sqrt{x}(= 4x^{\frac{1}{2}}) = y$; allora $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}(= \frac{8}{3}\sqrt{x^3}) = \text{ABD}$.

$\dots \quad \dots \quad \dots$

Un caso particolare . . .



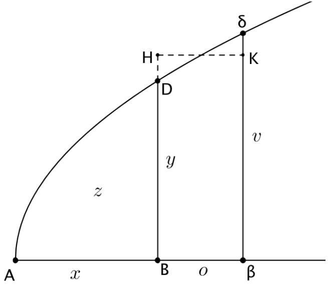
Ecco cosa Newton afferma:
6. Se $\frac{1}{x}(= x^{-1}) = y$; sarà $\frac{1}{0}x^{\frac{0}{1}} = \frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0} \times 1 = \frac{1}{0} =$ una quantità infinita; come è l'area dell'iperbole sotto entrambi i lati della linea BD.[3]

---

[3] Si veda [1, vol 2, p. 4]. Occorre ammettere che l'affermazioe di Newton è abbastanza oscura.

Dimostrazione della prima regola 1

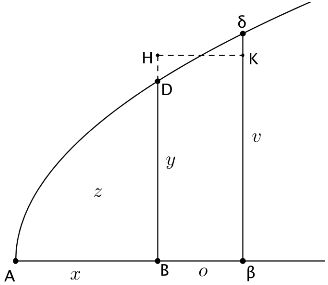
Newton la pone alla fine ... La dimostrazione è introdotta con un esempio paradigmatico (detto "Preparation for demonstrating the first Rule").



Con riferimento alla Figura, supponiamo che, "at the beginning", $AB = x, BD = y, \text{Area}\, ABD = z$. Sempre con riferimento alla Figura, sia $B\beta = o, BH = v$, dove v è scelto in modo che

$$\text{Rectangle } B\beta KH = \text{Surface } B\beta\delta D.$$

Dimostrazione della prima regola 2



Se $A\beta = x + o$, abbiamo $A\delta\beta = z + ov$. Newton considera la curva che sottende l'area z tale che $z^2 = \frac{4}{9}x^3$. Ne segue che $(z + ov)^2 = \frac{4}{9}(x + o)^3$, e di conseguenza

$$\cancel{z^2} + 2zov + \boxed{o^2v^2} = \frac{4}{9}\left(\cancel{x^3} + 3x^2o + \boxed{3xo^2 + o^3}\right).$$

Dimostrazione della prima regola 3

Ora, di fronte all'uguaglianza

$$\cancel{z^2} + 2zov + \boxed{o^2v^2} = \frac{4}{9}\left(\cancel{x^3} + 3x^2o + \boxed{3xo^2 + o^3}\right),$$

Newton osserva

> *"Now if we suppose $B\beta$ to be diminished infinitely and to vanish, or to be nothing, v and y in that Case will be equal ...."*

Ne segue che (poiché $z = \frac{2}{3}x^{3/2}$)

$$2 \times \frac{2}{3}x^{3/2}y = \frac{4}{9} \times 3x^2$$

ossia

$$y = \sqrt{x}.$$

La dimostrazione generale procede nello stesso modo, sempre partendo da una espressione della forma $z = F(x)$ per ritrovare un'espressione della forma $y = f(x)$.

Mancanza di 'rigore'?

Il metodo di Fermat utilizzato sbrigativamente...

Nella dimostrazione generale, Newton considera un'espressione della forma

$$\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}} = z$$

per concludere (usando la formula del binomio solo per esponenti interi) che

$$ax^{\frac{m}{n}} = y.$$

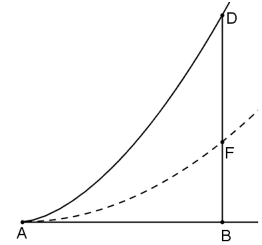
Aggiunge

> *Wherefore conversely, if*
>
> $$ax^{\frac{m}{n}} = y,$$
>
> *it shall be*
>
> $$\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}} = z.$$

La seconda regola

Per Newton si tratta di qualcosa di evidente (anche nel caso di infiniti termini):

> *If the Value of y be made up of several such Terms, the Area likewise shall be made up of the Areas which result from every one of the Terms.*[4]



Ad esempio, se $y = x^2 + x^{\frac{3}{2}}$ sarà $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} = ABD$.

[4] Si veda [1, vol. 1, p. 4].

La terza regola

But if the Value of y, or any of it's Terms be more compounded than the foregoing, it must be reduced into more simple Terms; by performing the Operation in Letters, after the same Manner as Arithmeticians divide in Decimal Numbers, extract the Square Root, or resolve affected Equations; and afterwards by the preceding Rules you will discover the Superficies of the Curve sought.[5]

Gli sviluppi in serie sono come 'trasferiti' dall'ambito dell'aritmetica usuale.

[5] *Ivi*, p. 6.

La divisione, usando il termine di grado minimo

L'algoritmo all'opera per $\quad y = \dfrac{a^2}{b+x}$.

$$
\begin{array}{rcl}
a^2 & = & \boxed{\dfrac{a^2}{b}}(b+x) - \dfrac{a^2}{b}x, \\
-\dfrac{a^2}{b}x & = & \boxed{-\dfrac{a^2}{b^2}x}(b+x) + \dfrac{a^2x^2}{b^2} \\
\dfrac{a^2x^2}{b^2} & = & \boxed{\dfrac{a^2}{b^3}x^2}(b+x) - \dfrac{a^2}{b^3}x^3, \\
\dots & & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots
\end{array}
$$

Quindi

$$\frac{a^2}{b+x} = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2}{b}\frac{x}{b} + \frac{a^2}{b}\frac{x^2}{b^2} - \cdots$$

Si ottiene l'area sottostante l'iperbole integrando termine a termine.

La radice quadrata 1

Newton vuole ottenere lo sviluppo in serie di $\sqrt{a^2 + x^2}$ in un 'intorno' di $x = 0$. Utlizza ricorsivamente questa formula

$$(S + z)^2 = S^2 + (2S + z) \cdot z.$$

Per $x = 0$ si ha $y = a$, quindi si ha come passo iniziale $S = a$. Ora, ponendo $z = hx^2$

$$a^2 + (2a + hx^2) \cdot hx^2 - a^2 - x^2 = h^2x^4 + 2ahx^2 - x^2.$$

Il coefficiente di x^2 si annulla per $h = \frac{1}{2a}$. Quindi il secondo passo dà $S = a + \dfrac{x^2}{2a}$.

La radice quadrata 2

Ora si procede nello stesso modo.

$$S = a + \frac{x^2}{2a} + hx^4,$$

$$\left(a + \frac{x^2}{2a}\right)^2 + \left[2\left(a + \frac{x^2}{2a}\right) + hx^4\right] hx^4 - a^2 - x^2 =$$
$$= \frac{x^4}{4a^2} + h^2x^8 + 2hax^4 + \frac{hx^6}{a}.$$

Quindi $h = -\dfrac{1}{8a^3}$, ecc.

Newton ha già ottenuto una formula generale per lo sviluppo di

$$(1 + x)^\alpha$$

con $\alpha \in \mathbb{Q}$, che potrebbe adattare, ma preferisce non usarla.

La risoluzione delle equazioni

Il caso delle equazioni ‘affette’

Per semplicità ho posto $a = 1 \ldots$

$$f_0(y) = y^3 + y - 2 + xy - x^3 = 0.$$

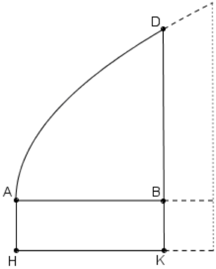
Newton vuole ottenere y come sviluppo in serie.
Per $x = 0$, si ha $y = 1$.
La serie richiesta sarà della forma $S = 1 + \cdots$ Poniamo $y = 1 + p$ e sostituiamo:

$$f_1(p) = 4p + 3p^2 + p^3 + x + px - x^3 = 0.$$

Se p è un monomio di primo grado, si ha
$4p + x = 0 \Rightarrow S = 1 - \frac{x}{4} + \cdots$
Ora si pone $y = 1 - \frac{x}{4} + q$ e si calcola $f_2(q)$
Ovviamente ora q è un monomio di secondo grado in x ...

Necessità di maggio rigore …

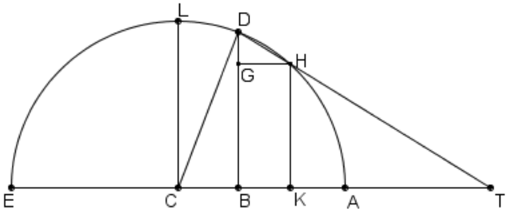
Confronto tra momenti



…from the moment BD continually given, you can, by Means of the preceding Rules, investigate the area ABD described by it, or compare it with $AK\,(x)$, which is described by the moment 1. Now by the same Means that the Superficies ABD from it's Moment being at all Times given, is discovered by the foregoing Rules, by the like Means may any other Quantity be investigated from it's Moment given in like manner.

Lunghezza di un arco di cerchio 1

$CA = 1$, $CB = x$; DH momento di LD, BK momento di CB.



$DH : BK = DT : BT = CD : BD.$
Ma $BK = 1, CD = 1, BD = \sqrt{1-x^2}$ e quindi

$$\frac{DH}{BK} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} =$$
$$= \left(1 + x^2 + x^4 + \cdots\right)\left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{8} + \cdots\right).$$

Lunghezza di un arco di cerchio 2

Integrando termine a termine, Newton ottiene

$$\mathsf{arch}(LD) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots$$

Ovviamente Newton ha ottenuto lo sviluppo di

$$\arcsin(x)$$

[1] I. Newton.
The Mathematical Works of Isaac Newton, volume 2.
Johnson Reprint Corporation, New York and London, 1964.

[2] I. Newton.
The Mathematical Papers of Isaac Newton, edited by D. T. Whiteside.
Cambridge University Press, Cambridge, 1967-1981.